ANALISI PROBABILISTICA DEL RISCHIO NELLE OPERAZIONI IMMOBILIARI: IL METODO MONTECARLO

Luca G. Lanza
Università degli Studi di Genova

1978 - *Prova* (Warner Bros Records)
2:50 (Nini Salerno, Umberto Smaila)

«Hai provato a prender posto
in un treno a ferragosto
e trovare Nanni Loy nella toilette …

… PROVA … !! »

STRUMENTI PER LA VALUTAZIONE DEL RISCHIO – STIMA DEGLI EFFETTI DI EVENTI ALEATORI

Esempio:

Stima della probabilità di default di una operazione immobiliare

METODO MONTECARLO

- Metodo basato sul **campionamento casuale** per ottenere soluzioni numeriche di problemi ad elevato numero di variabili
- insieme di metodi di simulazione di un qualsiasi processo la cui evoluzione è ***condizionata da fattori stocastici*** (aleatori)

Non c'è un solo metodo Monte Carlo; il termine descrive una classe di approcci utilizzati per una larga categoria di problemi. Tuttavia, questi approcci tendono a seguire un particolare schema:

1. Definire un dominio di possibili dati in input.
2. Generare input casuali dal dominio ***con una distribuzione di probabilità predeterminata***.
3. Eseguire un calcolo deterministico utilizzando i dati in ingresso (input).
4. Aggregare i risultati dei calcoli singoli nel risultato finale.

Nel 1946, mentre era in convalescenza per una malattia, lo scienziato Americano Stanislaw Ulam si chiese quale fosse la ***probabilità di vincere una partita di solitario a carte*** e si rese conto che giocare semplicemente un certo numero di volte e osservare la percentuale di giocate vinte sarebbe stato molto più semplice che tentare di calcolare tutte le possibili combinazioni di carte.

Un altro esempio dell'utilizzo del Metodo Monte Carlo è **l'analisi scacchistica**. Alcuni programmi scacchistici in commercio implementano opzioni di «analisi Monte Carlo». Per valutare una posizione, si fanno giocare al computer migliaia di partite partendo dalla posizione da analizzare, facendo eseguire al PC delle mosse "random" (una scelta casuale tra le mosse che il programma giudica più logiche). La media dei risultati ottenuti in queste partite è un'indicazione plausibile della mossa migliore.

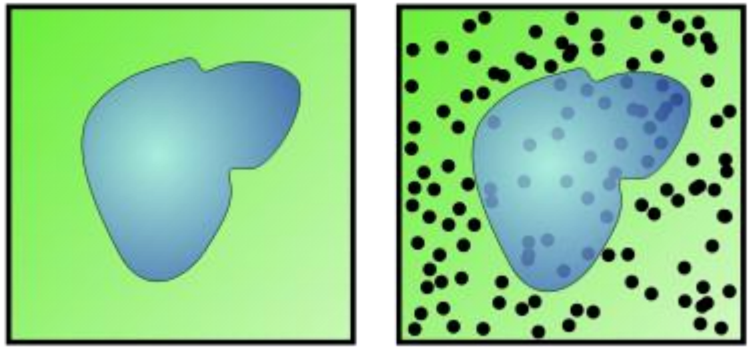
Esempio classico: **Determinazione della superficie di un lago**

- Sia data una zona rettangolare o quadrata di cui la lunghezza dei lati – e quindi l'area – è conosciuta.
- Al centro di quest'area si trova un lago la cui superficie è sconosciuta.

Per determinare l'area del lago, si punti a caso un pennarello nero X volte in modo aleatorio sull'intera area. Contiamo in seguito il numero N di punti neri che sono rimasti sulla terra, possiamo quindi determinare il numero di punti che sono rimasti dentro il lago: X-N. È sufficiente quindi stabilire un rapporto tra i valori:

$$\frac{\text{superficie}_{\text{terreno}}}{\text{superficie}_{\text{lago}}} = \frac{X}{X-N}$$

$$\text{superficie}_{\text{lago}} = \text{superficie}_{\text{terreno}} \cdot \frac{X-N}{X}$$



Per esempio, se il terreno ha superficie di 1000 m^2, e supponiamo che il pennarello venga puntato 500 volte e che 100 punti siano rimasti dentro il lago allora la superficie del lago è di: 100*1000/500 = 200 m^2.

Naturalmente, la qualità della stima migliora aumentando il numero dei tiri ed assicurandosi che il pennarello non venga puntato sempre nello stesso posto ma copra bene la zona. Questa ultima ipotesi coincide con l'ipotesi di avere un buon ***generatore di numeri aleatori***, questa condizione è indispensabile per avere dei buoni risultati con il metodo Monte Carlo. Un generatore distorto è un po' come un pennarello che viene indirizzato verso alcune zone rispetto ad altre: le informazioni che se ne possono ricavare sono anch'esse distorte.

Fonte: Wikiipedia

Campionamento di Variabili Aleatorie

La generazione di un campione di una variabile aleatoria(*) costituisce un ingrediente essenziale di ogni esperimento Monte Carlo.

(*) *... con assegnata distribuzione (regole della partita a scacchi o del solitario a carte)*

Densita' di Probabilita' Uniforme

v.a. U :

$$f_U(u) = \begin{cases} 1 & 0 \le u \le 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} < u > = 0.5 \\ \sigma = \dfrac{1}{\sqrt{12}} = 0.288 \end{array}}$$

La funzione di densita' di probabilita' uniforme e' la densita' da cui e' possibile la generazione delle altre distribuzioni di probabilita'.

Fonte: https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/111635

Metodo della Trasformata Inversa

Funzione CUMULATA

$x \in [a,b]$: $p(x)$; $\quad F_X(\gamma) = \int_a^{\gamma} p(x)\,dx$

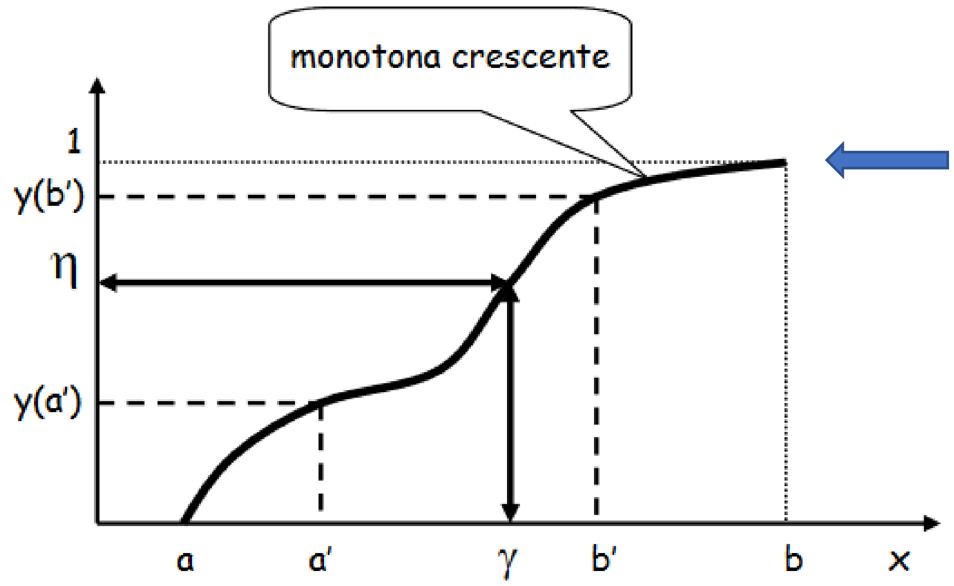
$\eta \in [0,1]$: $U[0,1]$

la v.a. γ data da:

$$\eta = \int_a^{\gamma} p(x)\,dx = F_x(\gamma) \quad (1)$$

e' distribuita secondo p(x).

$$\boxed{\gamma = F_X^{-1}(\eta)}$$



Funzione CUMULATA della distribuzione di probabilità desiderata

FX(x) = P[X ≤ x] (probabilità di non superamento)

$\forall\ y \in [0,1] \quad \exists\ x \in [a,b]$ unica soluzione della (1)

γ, radice della (1), ha densita' di probabilita' p(x) se η e' distribuita uniformemente, qualunque sia p(x).

Fonte: https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/111635

Metodo della Trasformata Inversa

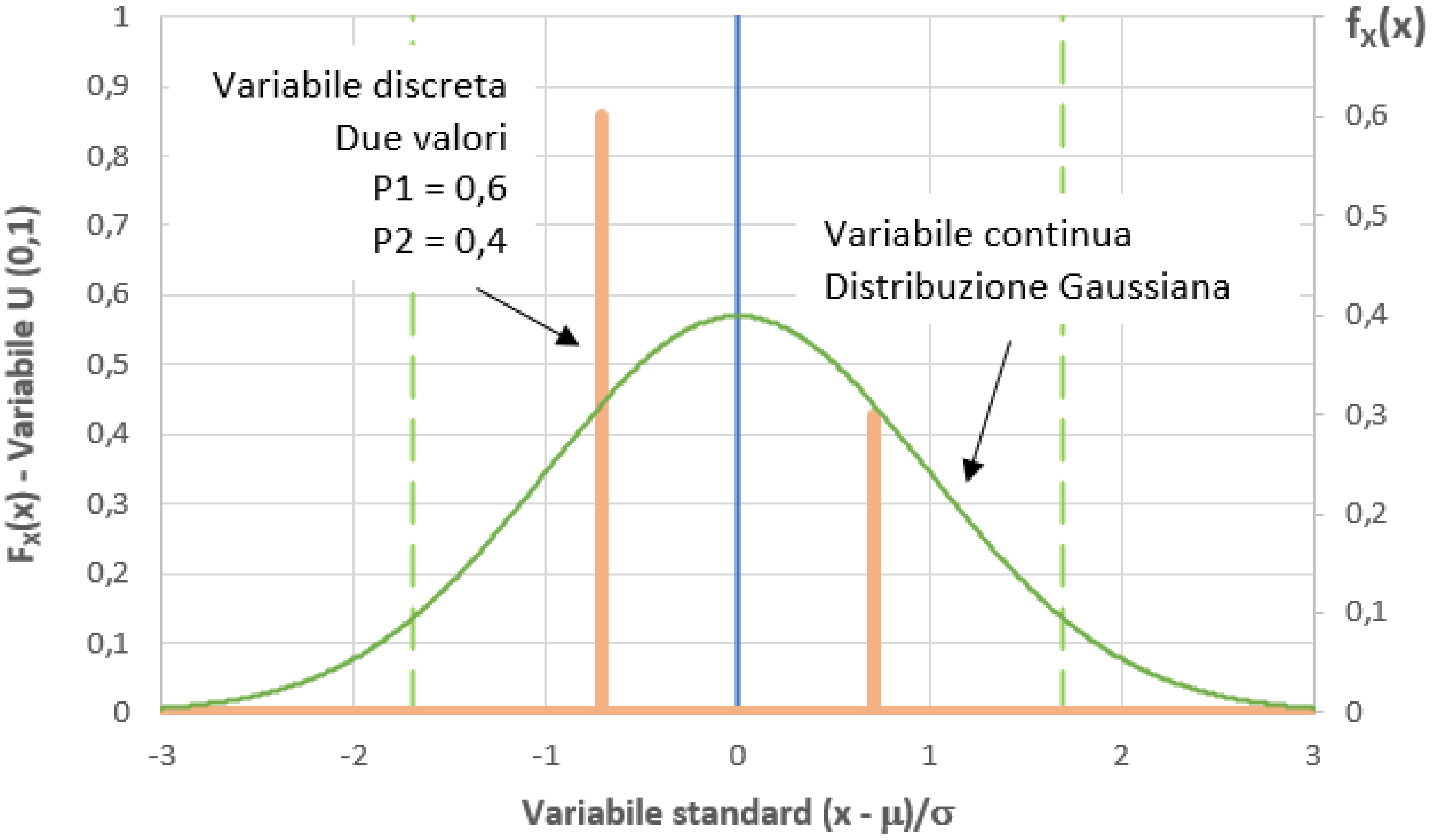
- Il teorema non distingue tra p(x) continue e discrete: la distribuzione cumulativa puo' essere calcolata anche per una densita' di probabilita' discreta.
- Il metodo e' limitato alle funzioni p(x) in cui l'inversa $F^{-1}(x)$ puo' essere ottenuta analiticamente o attraverso una semplice approssimazione numerica.

Algoritmo

1. Generare η uniformemente in $U(0,1)$
2. $X \leftarrow F_x^{-1}(\eta)$
3. Ritornare X

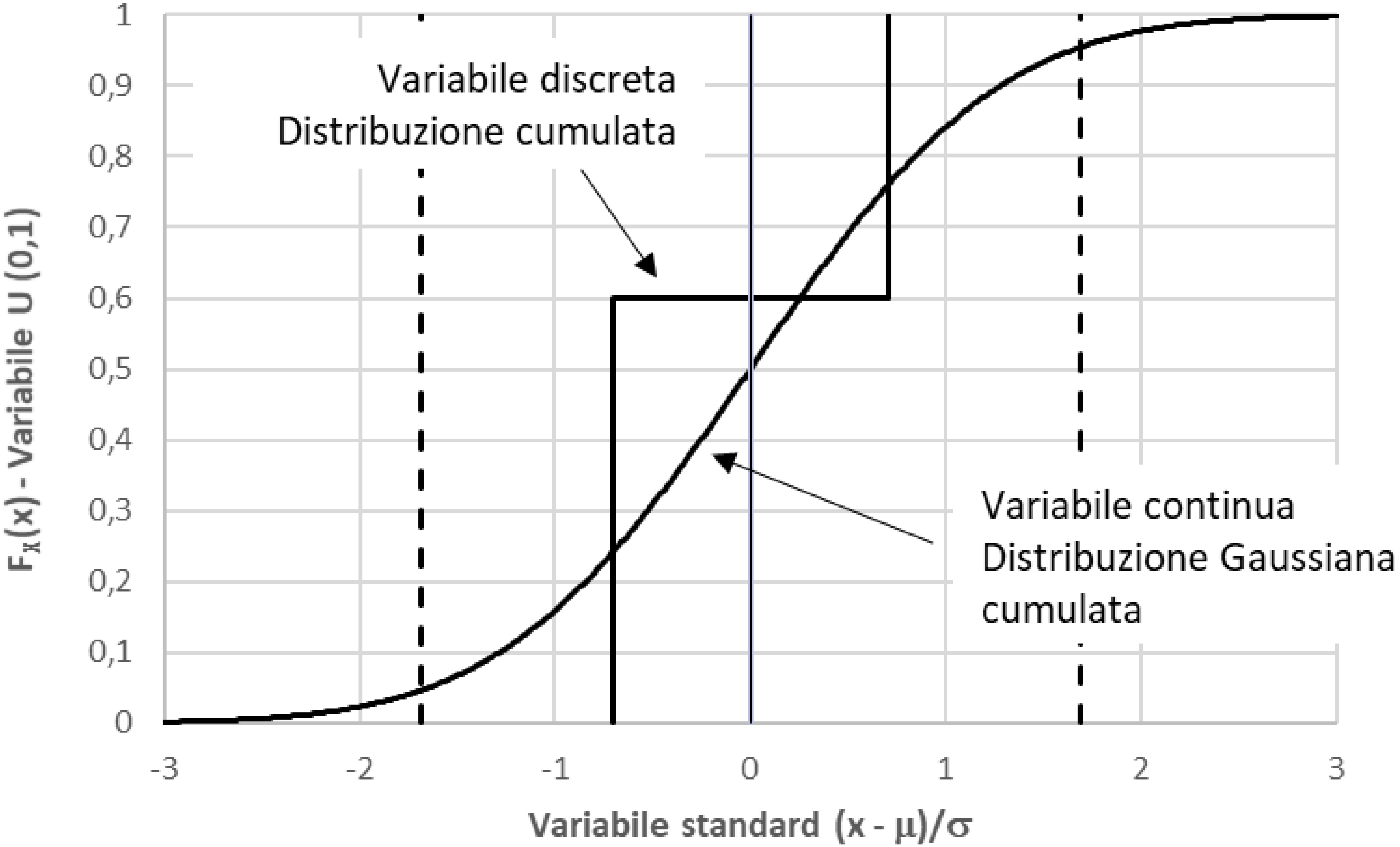
Questo metodo ha un'efficienza del 100% : ogni estrazione di η produce una x.

Costruzione delle distribuzioni di probabilità delle variabili aleatorie (continue o discrete) che possono influenzare l'esito dell'operazione immobiliare (esempio con 2 variabili)



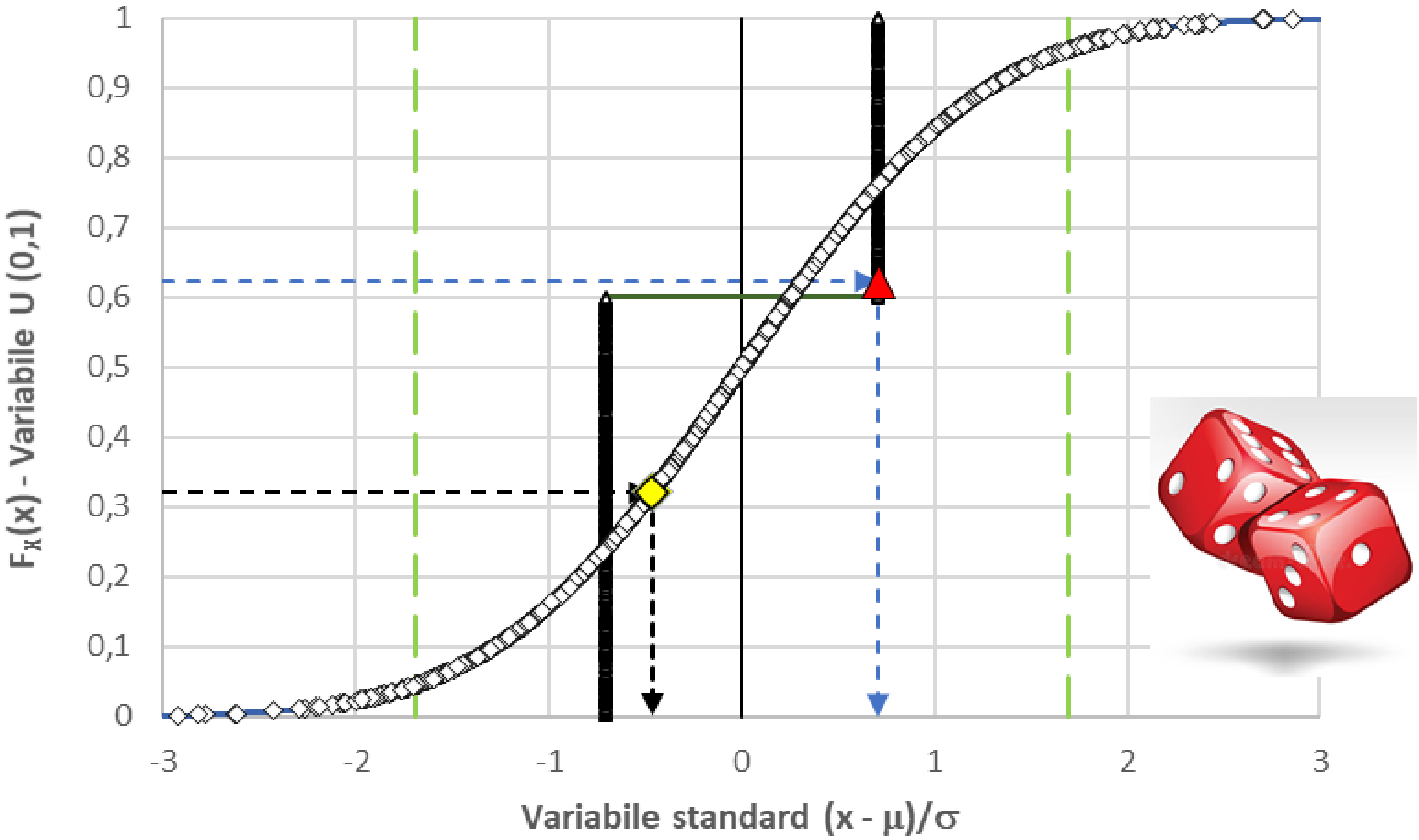
In forma standardizzata in modo da rendere il calcolo indipendente dai valori delle variabili

Costruzione delle **distribuzioni di probabilità cumulata** delle variabili aleatorie (continue o discrete) che possono influenzare l'esito dell'operazione immobiliare



In forma standardizzata in modo da rendere il calcolo indipendente dai valori delle variabili

Generazione casuale di una variabile aleatoria U (0,1) ed inversione della distribuzione cumulata



Ricostruzione dei valori delle variabile aleatorie e valutazione dell'impatto sull'operazione immobiliare
Valutazione statistica (conteggio delle occorrenze) della probabilità di successo/insuccesso